**CHUYÊN ĐỀ: PHƯƠNG TRÌNH**

**BÀI 1: PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI**

**A. Kiến thức cần nhớ**

1. Giải phương trình: 

- Nếu  trở thành 

+ Nếu  có vô số nghiệm

+ Nếu  vô nghiệm

- Nếu  trở thành 

2. Giải phương trình: 

- Nếu  trở thành  quay trở về dạng 1

- Nếu  là phương trình bậc hai

Tính  hoặc  rồi tìm nghiệm của bài toán.

3. Định lí Vi-ét

Giả sử phương trình  có nghiệm  thì 

4. Vi-ét đảo

Nếu  thỏa mãn:  thì  là nghiệm của phương trình: 

**Bài 1:**

Giải và biện luận phương trình: , với m là tham số

**Lời giải**

Phương trình 

- Nếu , phương trình (1) trở thành  phương trình (1) có vô số nghiệm

- Nếu , phương trình (1) trở thành  (vô lý)  phương trình vô nghiệm

- Nếu  phương trình (1) có nghiệm duy nhất 

**Bài 2:**

Cho số thực dương a thỏa mãn: . Chứng minh rằng phương trình sau vô nghiệm 

**Lời giải**

Ta có: 

Theo giả thiết: 

Giả sử 

 mẫu thuẫn với (2)

Vậy  phương trình (1) vô nghiệm

**Bài 3:**

Giả sử  là hai nghiệm của phương trình  và  là hai nghiệm của phương trình . Chứng minh 

**Lời giải**

Áp dụng định lí ta có: 

Ta có:





 (đpcm)

**Bài 4: Chuyên Toán Vĩnh Phúc, năm học 2017**

Cho phương trình  (1)

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

b) Giả sử phương trình (1) có 2 nghiệm . Chứng minh rằng 

**Lời giải**

a) Để phương trình (1) có nghiệm



Theo định lí Viét ta có: 



Ta chứng minh  (luôn đúng)

.

**Bài 5:**

Giả sử  là nghiệm của phương trình . Chứng minh rằng  là một số nguyên

**Lời giải**

Đặt 

Theo định lí Viét ta có 

Vì  là hai nghiệm khác 0 của phương trình  nên:

 (nhân với )

 (nhân với )

 (với )

Nếu  là số nguyên,  là số nguyên  là số nguyên

 là số nguyên,  là số nguyên  là số nguyên.

**Bài 6: Chuyên Lê Hồng Phong TP HCM, năm học 2003**

Chứng minh rằng nếu  thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm  và 

**Lời giải**

Ta sử dụng phương pháp phản chứng

Giải sử cả hai phương trình đã cho đều vô nghiệm. Khi đó:  và 

 (1)

Mặt khác dễ chứng minh được:  và  do 

Vậy  (2)

Từ (1) và (2) ta thấy mâu thuẫn, nên điều giả sử là sai

Vậy ít nhất 1 trong 2 phương trình đã cho có nghiệm.

**Bài 7: NK Trần Đại Nghĩa TP HCM, năm học 2001**

Cho phương trình  có hai nghiệm  thỏa mãn . Chứng minh



**Lời giải**

Theo hệ thức Viét ta có:  và do  nên  là nghiệm của phương trình đã cho. Thay  vào phương trình ta được: 

*\*) Lưu ý:*  với mọi 

Nếu 

Áp dụng cho  ta có điều phải chứng minh.

**Bài 8: NK Trần Đại Nghĩa TP HCM, năm học 2001**

Giả sử các phương trình  và  () có các nghiệm tương ứng là  và . Chứng minh rằng 

**Lời giải**

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: 



Theo địn lí Viét ta có:  và 

Vậy  (đpcm)

**Bài 9:**

Chứng minh rằng nếu  thì phương trình bậc hai  có hai nghiệm phân biệt

**Lời giải**

Ta có 



Giả sử  mâu thuẫn với giả thiết 

Vậy  nê phương trình có hai nghiệm phân biệt.

**Bài 10: ĐHKHTN HN, năm học 2015**

Giả sử  là hai số thực phân biệt thỏa mãn 

a) Chứng minh rằng 

b) Chứng minh rằng 

**Lời giải**

a) Nhận thấy  là hai nghiệm phân biệt của phương trình ẩn  sau:



Theo định lí Viét ta có 

b) Theo Viét ta cũng có 

Có 

**BÀI 2: PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA**

**A. Kiến thức cần nhớ**

1) Phương trình bậc ba:  (\*)

2) Cách giải

a) Phân tích đa thức thành nhân tử

- Nhẩm nghiệm: Đa thức  có ngiệm  thì 

- Sử dụng máy tính để xác định nghiệm

b) Biến đổi đa thức về dạng 

Trong đó:  có thể là các biểu thức chứa  hoặc là những hằng số

Khi đó phương trình 

3) Chú ý:

- Nếu  là các số nguyên và  là nghiệm hữu tỉ của phương trình (\*) thì  là ước của  và  là ước của  Đặc biệt khi  thì phương trình (\*) có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó là nguyên và là ước của 

- Nếu  thì phương trình (\*) có một nghiệm là 

- Nếu  thì phương trình (\*) có một nghiệm là 

**B. Bài tập**

**Bài 1:** Giải các phương trình sau

a)  b) 

c)  d) 

**Lời giải**

a) Dùng phương pháp nhẩm nghiệm ta thấy  là một nghiệm của phương trình nên có 1 nhân tử là 

Ta có: 



b) Dùng phương pháp nhẩm nghiệm ta thấy  là một nghiệm của phương trình nên có 1 nhân tử là 

Ta có: 



c) Dùng phương pháp nhẩm nghiệm ta thấy  là một nghiệm của phương trình nên có 1 nhân tử là 

Ta có: 

d) .

**Bài 2:** Giải các phương trình sau

a)  b) 

**Lời giải**

a) Ta có: 

b) Ta có: 

**Bài 3:** Giải các phương trình sau

a)  b) 

c) 

**Lời giải**

a) Ta có:  nên ta nhẩm các nghiệm có dạng  với  là ước của , ta thấy  là nghiệm của phương trình

Phương trình 

Vậy tập nghiệm của phương trình 

b) Ta có:  nên ta nhẩm các nghiệm có dạng  với  là ước của 

Ta nhận thấy  là nghiệm của phương trình

Phương trình 

Vậy tập nghiệm của phương trình 

c) Vì các hệ số xuất hiện  nên ta nhẩm nghiệm có dạng  Thay vào phương trình ta có:  (\*)

Vì tổng các hệ số của (\*) bằng 0 nên (\*) có nghiệm  hay phương trình đã cho có nghiệm 

Có: 

Vậy tập nghiệm của phương trình 

**Bài 4:** Giải các phương trình sau

a)  b) 

**Lời giải**

a) Nhẩm các nghiệm  với  là ước của  ta thấy phương trình không có nghiệm nguyên

Ta thấy các hệ số xuất hiện  nên ta nghĩ tới hằng đẳng thức như sau:



Vậy tập nghiệm của phương trình 

b) Bằng cách nhẩm nghiệm, ta thấy phương trình đã cho không có nghiệm hữu tỉ. Ta biến đổi phương trình như sau:





Vậy phương trình có tập nghiệm 

**Bài 5:** Cho đa thức 

a) Phân tích đa thức thành nhân tử

b) Tìm m để đa thức  có 3 nghiệm phân biệt sao cho có một nghiệm là trung bình cộng của hai nghiệm còn lại

**Lời giải**

a) Ta có 

b)  có ba nghiệm 

 có ba nghiệm phân biệt , ta xét các trường hợp sau:

- TH1: Nếu 

- TH2: Nếu 

- TH3: Nếu 

Vậy  là các giá trị cần tìm.

**Bài 6:**

Giải phương trình  (1)

**Lời giải**

Đặt 

*\*) Nhận xét:* Nếu 

Nhận thấy: 

Nên 

**Bài 7:** Cho phương trình  (1)

a) Tìm các số hữu tỷ a, b để phương trình (1) có nghiệm 

b) Với giá trị a, b vuwà tìm được. Gọi  là 3 nghiệm của phương trình (1) và đặt  với . Tính  và chứng minh 

**Lời giải**

a) Thay  vào phương trình (1) ta được:



 (do a, b là số hữu tỷ)

b) Phương trình 

Đặt 

Ta có 

Theo Viét ta có: 

Đặt 



Có: 



**Bài 8:**

Biết rằng  là một nghiệm của phương trình  với các hệ số hữu tỉ. hãy tìm các nghiệm còn lại

**Lời giải**

Thay  vào phương trình, ta được: 

- Nếu  (vô lý)

Từ đó  thay vào phương trình

Vậy nghiệm còn lại của phương trình là 

*Lưu ý:*  nên 

**Bài 9:**

Xác định các số nguyên ,  sao cho một trong các nghiệm của phương trình  là 

**Lời giải**

Thay  vào phương trình ta được hệ thức: 

Do  nguyên nên: 

Vậy .

**Bài 3: NHẢM NGHIỆM ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO**

**A. Kiến thức cần nhớ**

1) Định lí Bơzu: Nếu phương trình  có nghiệm  thì 

\*) Nhận xét 1: Cho  với 

Nếu phương trình có nghiệm 

\*) Nhận xét 2: Sử dụng lược đồ hoocne để chia đa thức

**B. Bài tập**

**Bài 1:** Giải phương trình sau



**Lời giải**

\*) Phân tích: Sử dụng máy tính ta tìm được nghiệm  phương trình có 1 nhân tử là 

Ta có phương trình 

**Bài 2:** Giải phương trình sau



**Lời giải**

Phân tích:

- Nếu phương trình có nghiệm nguyên thì nghiệm đó là ước của 2, từ đó tìm được nghiệm

 có một nhân tử là 

- Tổng các hệ số bằng 0 nên phương trình có nghiệm 

- Tổng các hệ số của  mũ chẵn bằng tổng hệ số  mũ lẻ thì phương trình có nghiệm 

Ta có: 



Vậy phương trình có tập nghiệm 

**Bài 3:** Giải phương trình sau



**Lời giải**

Phương trình có tổng các hệ số bằng 0 nên có một nghiệm , tức là có một nhân tử là

, ta có: 





Vì 

Vậy phương trình có hai nghiệm 

**Bài 4:** Giải phương trình sau



**Lời giải**

Nhận thấy  là một nghiệm của phương trình, nên phương trình có nhân tử 

Ta có 





Vì 

Vậy phương trình có nghiệm 

**Bài 5:** Giải phương trình sau



**Lời giải**

Nhẩm nghiệm  là nghiệm của phương trình nên có nhân tử là 

Ta có 



Vì .

Vậy phương trình có nghiệm 

**Bài 6:** Giải phương trình sau



**Lời giải**

Ta có 



+) TH1: 

+) TH2: 



Ta có:  và 

 phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất 

**Bài 7:** Giải phương trình sau



**Lời giải**

Ta có 





Vì  và nên phương trình (\*) vô nghiệm.

**Bài 8:** Giải phương trình sau



**Lời giải**

Ta có 







Vì 

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**C. MỘT SỐ DẠNG TOÁN KHÁC**

**Mẫu 1:** Phương trình đẳng cấp bậc hai.

Ví dụ: Tìm mối liên hệ giữa  và , biết 

Phân tích: Ta xét 

Với , chia cả hai vế cho  ta được: 

Đặt 

**Bài 1:** Giải phương trình sau



**Lời giải**

Điều kiện: 

Đặt 

Phương trình 



+) TH1: 

+) TH2: 

Giải 2 trường hợp và đối chiếu điều kiện ta tìm được nghiệm của phương trình.

**Bài 2:** Giải phương trình sau



**Lời giải**

Đặt 

Ta có phương trình: 

+) TH1:  (phương trình vô nghiệm)

+) TH2: 

Vậy phương trình có hai nghiệm .

**Bài 3:** Giải phương trình sau



**Lời giải**

Ta có: 

Đặt 



+) Nếu  (phương trình vô nghiệm)

+) Nếu 

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**Mẫu 2: Sử dụng hẳng đẳng thức** 



**Bài 1:** Giải phương trình sau



**Lời giải**

Áp dụng hẳng đẳng thức 





Vậy phương trình có nghiệm .

**Bài 2:** Giải phương trình sau



**Lời giải**

Ta có 

Sử dụng hẳng đẳng thức 

Nhận xét: Nếu 

Áp dụng vào bài toán:

Ta có: 

Do đó 

Vậy phương trình có ba nghiệm 

**BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG**

**A. Kiến thức cần nhớ**

1. Phương trình bậc 4 trùng phương:  (\*)

2. Cách giải

- Với một phương trình cụ thể: 

+ Áp dụng cách giải tổng quát

+ Sử dụng máy tính

- Với phương trình chứa tham số ta áp dụng cách giải tổng quát

\*) Phương pháp giải:

Đặt  trở thành  (\*\*)



- Nếu  phương trình (\*\*) vô nghiệm  phương trình (\*) vô nghiệm

- Nếu  phương trình (\*\*) có nghiệm kép 

+ Nếu 

+ Nếu  vô nghiệm vì 

- Nếu  phương trình (\*\*) có nghiệm 

Căn cứ vào dấu của  để tìm 

*Ví dụ:* Giả sử ; 

Nếu  loại

\*) Chú ý: Nếu  có 

- Nếu  có 

**B. Bài tập**

**Bài 1:**

Tìm một phương trình bậc 4 trùng phương để 

**Lời giải**

Ta có 





 (đpcm)

**Bài 2:**

Cho phương trình . Chứng minh rằng 

Là một nghiệm của phương trình đã cho.

**Lời giải**

Ta có 

Với 



Thay  vào vế trái của (1) ta được:





Vậy  là một nghiệm của phương trình đã cho (đpcm).

**Bài 3:**

Cho phương trình  (1). Tìm giá trị của m để phương trình trên có 4 nghiệm phân biệt  thỏa mãn 

**Lời giải**

Đặt , phương trình (1) trở thành: 

Để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm dương phân biệt 

Vậy với  thì phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt  Khi đó phương trình (1) có 4 nghiệm: 



Do  là giá trị cần tìm.

**Bài 4:**

Cho phương trình 

a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có nghiệm

b) Tìm giá trị của m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt  thỏa mãn



**Lời giải**

a) Đặt  phương trình đã cho trở thành 

Dễ thấy phương trình đã cho luôn có nghiệm 

b) Với  thì phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt:



Vậy  (thỏa mãn điều kiện)

**Bài 5:** Chuyên Hà Nam, năm học 2012

Cho phương trình  (với m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có 4 nghiệm phân biệt với mọi m

b) Tìm m để 

**Lời giải**

a) Đặt , phương trình đã cho trở thành 

Ta có  với mọi m

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt  và 

Theo định lí Viét ta có: 

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt

b) Giả sử 

và 

Thay vào biểu thức Q ta được giá trị của m cần tìm.

**Bài 6: Chuyên Vũng Tàu, năm học 2018**

Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Đặt 

Phương trình (3) 



Do 

Ta có  do (2)

Từ  (thỏa mãn điều kiện (2))

Vậy 

**BÀI 5: PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN DẠNG ĐỖI XỨNG VÀ HỒI QUY**

**A. Kiến thức cần nhớ**

1. Phương trình bậc bốn dạng đối xứng

 (\*)

Cách giải:

- Nếu  trở thành:  (vô lý do )

- Nếu  chia cả hai vế của phương trình (\*) cho , ta được:



Đặt  tìm được t và so sánh với điều kiện 

2. Phương trình bậc bốn dạng hồi quy

 (\*\*) và 

Cách giải:

- Nếu  trở thành: 

+ Có 1 nghiệm 

+ Vô nghiệm

- Nếu  chia cả hai vế của (\*\*) cho  ta được: 

Đặt 

Đặt 

Từ 

*\*) Chú ý:* - Nếu  là phương trình dạng đối xứng

- Nếu  là phương trình dạng phản đối xứng

**Bài 1:**

Giải phương trình sau: 

**Lời giải**

**Nhận xét:**

*Cách 1:* Dùng máy tính tính được nghiệm của phương trình là  sau đó phân tích đa thức thành nhân tử và tìm nghiệm của phương trình, ta được:



*Cách 2:* Nhận thấy tổng các hệ số của phương trình bằng 0, nên phương trình có 1 nghiệm  có 1 nhận tử là 

*Cách 3:* Nhận thấy  phương trình dạng hồi quy

- Nếu  trở thành:  (vô lý)

- Nếu  chia cả hai vế của phương trình (1) cho  ta được: 



Đặt , phương trình (2) trở thành: 



- Nếu 

- Nếu 

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt .

**Bài 2:** SPĐN, năm học 2006

Giải phương trình sau: 

**Lời giải**

*Cách 1:* 



*Cách 2:* Nhận thấy phương trình (1) có dạng phản đối xứng

- Nếu  trở thành  (vô lý)

- Nếu  chia cả 2 vế cho  ta được: 

Đặt  ta được: 

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt 

**Bài 3:**

Giải các phương trình sau:

a)  b) 

**Lời giải**

a) Nhận thấy  không là nghiệm của phương trình (1)

Với , chia cả hai vế của phương trình cho  ta được



Đặt  phương trình đã cho trở thành: 

- Với 

- Với 

b) Dễ thấy  không là nghiệm của phương trình (2)

Với , chia cả hai vế của phương trình cho  ta được:



Đặt  phương trình đã cho trở thành: 



- Với 

- Với  (vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm 

**Bài 4:**

Giải các phương trình sau: 

**Lời giải**

Dễ thấy  không là nghiệm của phương trình

Với , chia cả hai vế của phương trình cho  ta được: 

, đặt , ta được phương trình:



- Với 

- Với 

**Bài 5:**

Giải phương trình sau: 

**Lời giải**

Điều kiện 

Đặt 

Phương trình (1) trở thành: 

- Với 

- Với 

Vậy phương trình có tập nghiệm 

**Bài 6:**

Giải phương trình sau: 

**Lời giải**

*Nhận xét:* Phương trình trên không phải dạng đối xứng hay hồi quy

Dùng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử, ta được:





**Bài 7:** Chuyên Vũng Tàu, năm học 2018

Giải phương trình sau:  (1)

**Lời giải**

Điều kiện: 

Đặt 





*(tổng hệ số bậc chẵn bằng tổng hệ số bậc lẻ)*



Do  và  (do 2)

Từ  (thỏa mãn điều kiện 2) 

**BÀI TẬP TƯƠNG TỰ**

**Bài 1:**

Giải các phương trình sau:

a)  b) 

**Lời giải**

a) 

Dễ thấy  không phải là nghiệm của phương trình

Với  chia cả hai vế của phương trình đã cho cho  ta được:



Đặt  phương trình đã cho trở thành: 

- Với 

- Với 

b) 

Dễ thấy  không phải là nghiệm của phương trình

Với  chia cả hai vế của phương trình đã cho cho  ta được:



Đặt  phương trình đã cho trở thành: 



- Với 

- Với  (phương trình vô nghiệm)

Vậy phương trình có hai nghiệm là: 

**Bài 2:**

Giải các phương trình sau: 

**Lời giải**

Dễ thấy  không phải là nghiệm của phương trình

Với  chia cả hai vế của phương trình đã cho cho  ta được:



Đặt  phương trình đã cho trở thành: 



**Bài 3:**

Giải các phương trình sau: 

**Lời giải**

Dễ thấy  không phải là nghiệm của phương trình

Với  chia cả hai vế của phương trình đã cho cho  ta được:



Đặt  phương trình đã cho trở thành: 

**Bài 4:**

Giải các phương trình sau: 

**Lời giải**

Dễ thấy  không phải là nghiệm của phương trình

Với  chia cả hai vế của phương trình đã cho cho  ta được:



Đặt  phương trình đã cho trở thành:



**Bài 5:**

Giải các phương trình sau: 

**Lời giải**

Ta có 





Vậy phương trình có nghiệm .